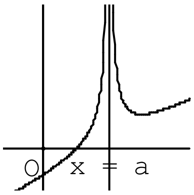
I. المستقيمات المقاربة

في جميع فقرات الدرس , ننسب المستوى إلى معلم متعامد $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$

1. فرع لا نهائي لمنحنى دالة عددية



تعريف: لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x و $\left(C_f\right)$ منحناها في المعلم $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$.

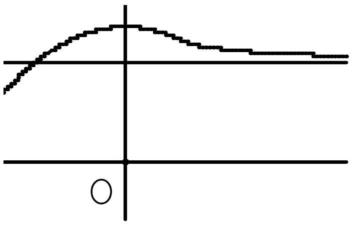
إذا آلت إحدى احداثيي نقطة من $\left(C_f\right)$ إلى ما لا نهاية , نقول إن $\left(C_f\right)$ يقبل فرعا لا نهائيا.

2. المقارب الموازي لمحور الأراتيب

تعريف: إذا كانت: $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\succ a}} f\left(x\right)=+\infty$ أو $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\succ a}} f\left(x\right)=-\infty$ أو $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\prec a}} f\left(x\right)=+\infty$ أو $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\prec a}} f\left(x\right)=-\infty$

نقول إن المستقيم ذا المعادلة $x=a$ مقارب للمنحنى $\left(C_f\right)$

مثال: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي : $f\left(x\right)=\dfrac{2x-1}{3x-6}$



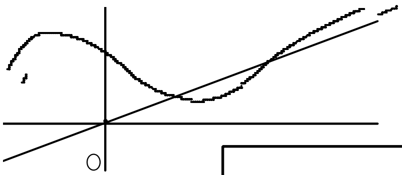
حدد $\lim\limits_{x\to 2^+} f\left(x\right)$ و $\lim\limits_{x\to 2^-} f\left(x\right)$ وأول النتيجتين هندسيا

3. المقارب الموازي لمحور الأفاصيل

تعريف: إذا كانت: $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=a$ (أو $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=a$) ,

نقول إن المستقيم ذا المعادلة $y=a$ مقارب للمنحنى $\left(C_f\right)$ بجوار $+\infty$ (أو بجوار $-\infty$)

مثال: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي : $f\left(x\right)=\dfrac{2x-1}{3x-6}$



حدد $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)$ وأول النتيجتين هندسيا

4. المقارب المائل

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x و تقبل نهاية غير منتهية بجوار $+\infty$ (أو بجوار $-\infty$)

إذا كانت: $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)-\left(ax+b\right)=0$ (أو $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)-\left(ax+b\right)=0$) حيث $a\in\mathbb{R}^*$ و $b\in\mathbb{R}$

نقول إن المستقيم ذا المعادلة $y=ax+b$ مقارب مائل للمنحنى $\left(C_f\right)$ بجوار $+\infty$ (أو بجوار $-\infty$) .

خاصية1: يكون المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ مقاربا مائلا للمنحنى $\left(C_f\right)$ بجوار $+\infty$ (أو بجوار $-\infty$)

إذا وفقط إذا وجدت دالة عددية h بحيث : $f\left(x\right)=\left(ax+b\right)+h\left(x\right)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h\left(x\right)=0$ (أو $\lim\limits_{x\to-\infty} h\left(x\right)=0$)

مثال: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي : $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-x+1}{x-2}$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f
2. حدد الأعداد الحقيقية a و b و c بحيث يكون لدينا : $\forall x\in D_f \quad : \ f\left(x\right)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$
3. أحسب نهايات الدالة f عند محدات D_f
4. بين أن المنحنى $\left(C_f\right)$ الممثل للدالة f يقبل مقاربا مائلا بجوار $+\infty$
5. أحسب مشتقة الدالة f و أدرس إشارتها
6. حدد جدول تغيرات الدالة f

خاصية2: يكون المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ $\left(a\neq 0\right)$ مقاربا مائلا لمنحنى $\left(C_f\right)$ إذا وفقط إذا كان : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f\left(x\right)}{x}=a$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)-ax=b$ (أو $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f\left(x\right)}{x}=a$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)-ax=b$)

II.الفروع الشلجمية

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x بحيث تقبل نهاية لا منتهية بجوار $+\infty$ (أو بجوار $-\infty$) و (C_f) منحناها في معلم متعامد $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1. فرع شلجمي اتجاهه محور الأفاصيل

> **تعريف:** إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ (أو $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=0$) نقول إن المنحنى (C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$ (أو بجوار $-\infty$)

مثال: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي : $f(x)=\sqrt{x}$

أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ وأول هندسيا النتيجة

2. فرع شلجمي اتجاهه محور الأراتيب

> **تعريف:** إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ أو $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$ نقول إن المنحنى (C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب

مثال: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي : $f(x)=x^3$

أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ وأول هندسيا النتيجة

3. فرع شلجمي اتجاهه المستقيم ذو المعادلة $y=ax$ حيث $a\neq 0$:

> **تعريف 1:** إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-ax=+\infty$ (أو $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-ax=-\infty$) نقول إن المنحنى (C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم ذي المعادلة $y=ax$ بجوار $+\infty$.

> **تعريف 2:** إذا كانت $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-ax=+\infty$ (أو $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-ax=-\infty$) نقول إن المنحنى (C_f) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم ذي المعادلة $y=ax$ بجوار $-\infty$.

مثال: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي : $f(x)=x^3$

1. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$
2. أدرس الفروع الشلجمية

III.تقعر منحنى – نقط الانعطاف

1. تقعر منحنى

> **تعريف:** لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I و (C_f) منحناها في معلم متعامد $(o;\vec{i};\vec{j})$.
> - نقول إن للمنحنى (C_f) تقعر موجه نحو محور الأراتيب الموجبة إذا كان يوجد فوق جميع مماساته
> - نقول إن للمنحنى (C_f) تقعر موجه نحو محور الأراتيب السالبة إذا كان يوجد تحت جميع مماساته

2. نقط الانعطاف

> **تعريف** لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I و $x_0\in I$ و (C_f) منحناها في معلم متعامد $(o;\vec{i};\vec{j})$.
> نقول إن النقطة $A(x_o;f(x_o))$ نقطة انعطاف المنحنى (C_f) إذا تغير تقعر المنحنى (C_f) عند النقطة A

3. التقعر والدالة المشتقة الثانية :

> **خاصية:** لتكن f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I و (C_f) منحناها في المعلم $(o;\vec{i};\vec{j})$.
> - إذا كانت f'' موجبة على المجال I فإن للمنحنى (C_f) تقعرا موجها نحو محور الأراتيب الموجبة.
> - إذا كانت f'' سالبة على المجال I فإن للمنحنى (C_f) تقعرا موجها نحو محور الأراتيب السالبة.
> - إذا كانت f'' تنعدم في النقطة $x_0\in I$ وتتغير إشارتها بجوار x_0 فان النقطة $A(x_o;f(x_o))$ نقطة انعطاف المنحنى (C_f) .

مثال: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي : $f(x)=\frac{1}{12}x^4-x^2+x+\frac{2}{3}$

1. أحسب $f''(x)$ $\forall x\in D_f$
2. أدرس تقعر منحنى الدالة f

IV. محور تماثل – مركز تماثل

خاصية: تكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة على مجموعة D و (C_f) منحناها في المعلم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

- يكون المستقيم ذو المعادلة $x=a$ $(a\in\mathbb{R})$ محور تماثل المنحنى (C_f) إذا وفقط إذا كان : $\begin{cases}(\forall x\in D);(2a-x)\in D\\(\forall x\in D);f(2a-x)=f(x)\end{cases}$
- تكون النقطة $\Omega(a;b)$ $(a\in\mathbb{R})$ و $(b\in\mathbb{R})$ مركز تماثل المنحنى (C_f)

إذا وفقط إذا كان : $\begin{cases}(\forall x\in D);(2a-x)\in D\\(\forall x\in D);f(2a-x)=2b-f(x)\end{cases}$

تمرين نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي : $f(x)=\sin x$ بين أن المستقيم ذا المعادلة $x=\frac{\pi}{2}$ محور تماثل للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f

تمرين نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي : $f(x)=\frac{2x^2-3x+3}{2x-1}$ بين أن النقطة $I\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ مركز تماثل للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f.

الثانوية التأهيلية: وادي الذهب الأستاذ : رشيد بلمو	تمارين: تطبيقية – للدعم والتثبيت دراسة الدوال	مستوى الدراسي: الأولى علوم تجريبية

تمرين1 نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=2x^3-3x^2+1$

1. أحسب نهايات التالية : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
2. أحسب مشتقة الدالة f و أدرس إشارتها
3. حدد جدول تغيرات الدالة f
4. بين أن المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب بجوار $+\infty$ و $-\infty$
5. أحسب $f''(x)$ وأدرس تقعر لمنحنى (C_f) الممثل للدالة f
6. مع تحديد نقطتي انعطافه.
7. حدد معادلة لمماس المنحنى (C_f) الممثل للدالة f في نقطة انعطافه A
8. بين أن النقطة A مركز تماثل للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f
9. أرسم المنحنى (C_f) الممثل للدالة f في معلم متعامد

تمرين2 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي :

$$f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-2}$$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f
2. حدد الأعداد الحقيقية a و b و c بحيث يكون لدينا : $\forall x\in D_f \quad : f(x)=ax+b+\frac{c}{x-2}$
3. أحسب نهايات الدالة f عند محدات D_f
4. بين أن المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقبل مقاربا مائلا بجوار $+\infty$
5. أحسب مشتقة الدالة f و أدرس إشارتها
6. حدد جدول تغيرات الدالة f
7. بين أن المنحنى (C_g) الممثل للدالة g المعرفة كالتالي : $g(x)=\frac{x^2+2x+3}{x^2+1}$ يقبل مقاربا مائلا بجوار $-\infty$

تمرين 3 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي :

$$f(x)=\frac{x^2-3x+6}{x-2}$$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f
2. حدد الأعداد الحقيقية a و b و c بحيث يكون لدينا : $\forall x\in D_f \quad : f(x)=ax+b+\frac{c}{x-2}$
3. أحسب نهايات الدالة f عند محدات D_f
4.
   a. أحسب مشتقة الدالة f و أدرس إشارتها
   b. حدد جدول تغيرات الدالة f
5. ليكن (C_f) الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$
6. أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f)
7. أنشئ (C_f)

تمرين 4 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي :

$$f(x)=x-1+\frac{1}{x-2}$$

ليكن (C_f) الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$

a. حدد D_f حيز تعريف الدالة f

حدد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b. حدد $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$ وأول النتيجتين هندسيا

2. بين أن : $f'(x)=\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2} \quad \forall x\in D_f$
3. أدرس تغيرات الدالة f و حدد جدول تغيرات الدالة f
4. بين أن المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقبل مقاربا مائلا بجوار $+\infty$ و $-\infty$ وحدده.
5. حدد معادلة لمماس المنحنى (C_f) الممثل للدالة f عند النقطة التي أفصولها $x_0=0$
6. بين أن النقطة $A(2;1)$ مركز تماثل للمنحنى (C_f)
7. أنشئ (C_f)

تمرين 5 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي :

$$f(x)=2-\sqrt{x+1}$$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f
2. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
3. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها

تمرين 6 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ كالتالي : $f(x)=x^3-2x^2$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f
2. أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
3. أدرس الفرع اللانهائي لمنحنى الدالة f بجوار $-\infty$

تمرين 7 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}^+$ كالتالي : $f(x)=\sqrt{x}-x$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f
2. أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
3. حدد طبيعة الفرع اللانهائي لمنحنى الدالة f

تمرين 8 نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ كالتالي : $f(x)=\frac{1}{12}x^4-2x^2+x+\frac{2}{3}$

1. أحسب $f''(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$
2. أدرس تقعر لمنحنى (C_f) الممثل للدالة f مع تحديد نقطتي انعطافه